

## Caracteristici dinamice ale traductoarelor

Caracteristicile dinamice se referă la funcționarea traductorului în regim dinamic - regim în care atât intrarea cât și ieșirea sunt variabile în timp:  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

În ipoteza de liniaritate a traductorului care a fost precizată la caracteristicile statice rezultă că, în regim dinamic, funcția traductorului este descrisă de următoarele ecuații diferențiale:

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t),$$

în care:

- $a_k$  și  $b_j$  sunt coeficienți constanți (structura traductoarelor nu se schimbă în exploatare normală);
- $n > m$  reprezintă condiția de realizabilitate fizică.

Comportarea în regim dinamic și implicit deducerea indicatorilor de performanță presupune găsirea soluțiilor ecuației diferențiale pentru mărimi de intrare tipice, standard. Se disting două cazuri (cazuri) de analiză:

- Se găsește soluția ecuației diferențiale pentru intrări standard nesinusoidale (impuls Dirac și treaptă unitate). Modalitatea cea mai utilizată este aplicarea calculului operațional (Laplace).
- Se consideră intrarea de tip sinusoidal cu amplitudine constantă și frecvență variabilă (de la o valoare mai mică la o valoare foarte mare) și se pune în evidență ieșirea.

Obs.: Ambele cazuri permit deducerea pe cale experimentală a caracteristicilor dinamice ale traductorului.

În condiții inițiale nule, aplicând transformarea Laplace ecuației diferențiale se obține:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k s^k\right)Y(s) = \left(\sum_{j=0}^m b_j s^j\right)X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \cdot X(s)$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt,$$

$$\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\omega}^{\sigma_c + j\omega} Y(s)e^{ts} ds, \quad \text{unde } \sigma_c \text{ este abscisa de convergență a funcției } Y(s).$$

Prin definiție se notează  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$  și se numește funcție de transfer. Această

funcție poate fi dedusă experimental pentru intrări tipice.

## 1. Impuls Dirac

$$X_{\delta}(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

$$Y_{\delta}(s) = H(s)$$

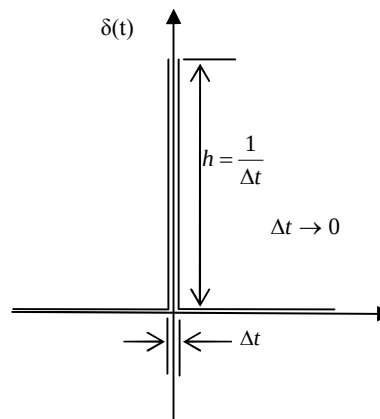
$$y_{\delta}(t) = h(t)$$

Răspunsul sistemului (traductorului) la intrare impuls Dirac este  $h(t)$ , care se numește funcție pondere.

Comentariu:

Din punct de vedere al realizabilității fizice, impulsul Dirac este foarte greu de realizat  $\rightarrow$  aproximări de tip dreptunghi sau triunghi. De cele mai multe ori, aplicarea unui astfel de impuls poate distruge E.S..

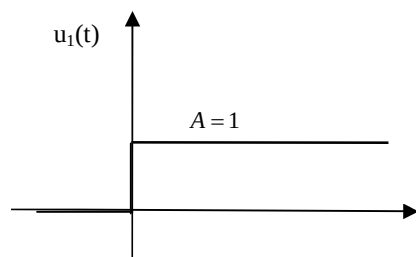
În cazurile practice, impulsul Dirac este foarte rar folosit pentru deducerea funcției pondere.



## 2. Treapta unitate:

$$X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{H(s)}{s}$$

$$y(t) = k(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$



se numește funcție indicială (răspuns indicial).

Acest tip de semnal este cel mai utilizat în cazurile practice pentru punerea în evidență a indicatorilor de performanță din domeniul timpului.

Se consideră intrarea de tip:  $x(t) = X \sin \omega t$ ;  $X = ct.$ ,  $\omega \in [0, \infty)$

Se pune în evidență ieșirea: datorită liniarității traductorului, acesta va conserva în ieșire frecvența, însă amplitudinea și faza ieșirii sunt dependente de pulsație (de frecvență).

$$y(t) = Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

În domeniul variabilei complexe, ieșirea se scrie:  $Y(j\omega) = Y(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  și se obține din  $y(t)$  aplicând transformarea Fourier directă:

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Dependența în timp la ieșire se scrie:  $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$

La sisteme fizic realizabile (de exemplu traductorul) transformata Fourier se obține din transformata Laplace făcând substituția  $s = j\omega$ :

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Y(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{X(\omega)e^{j0}} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Faza intrării se ia ca referință și se consideră 0.

Se pun în evidență două caracteristici de frecvență ale traductorului pe baza cărora se pot pune în evidență indicatorii de performanță din domeniul frecvență (pulsăție):

- $H(\omega)$  - caracteristica amplitudine-pulsăție
- $\varphi(\omega)$  - caracteristica fază-pulsăție,

Ambele căi de analiză pot fi deduse experimental și se bazează în principal pe determinarea funcției de transfer.

Structurile construite de traductoare au în componență unul sau două elemente acumulatorie de energie, astfel că funcțiile de transfer echivalente acestora sunt cele pentru elemente de întârziere de ordinul 1 și 2.

A)  $H_1(s) = \frac{k}{1 + \tau \cdot s}$  - element de întârziere de ordinul 1

B)  $H_2(s) = \frac{k}{1 + \tau_e s + \tau_a^2 s^2}$  - element de întârziere de ordinul 2

## A) Indicatori de performanță pentru elemente de întârziere de ordinul 1

Ecuția diferențială de ordinul I ce caracterizează traductorul se scrie:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad | \text{ aplicăm operatorul Laplace } \mathcal{L}$$

$$(a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 X(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} X(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0} s + 1} X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{k}{1 + \tau \cdot s} X(s) = H(s) \cdot X(s)$$

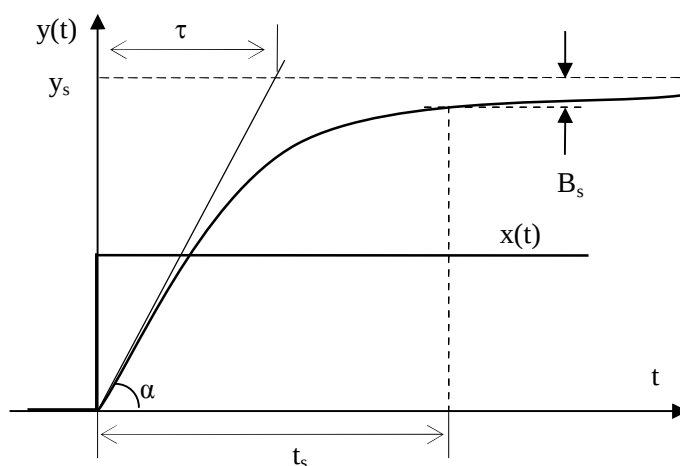
Unde am notat:  $k = \frac{b_0}{a_0}$  - factorul de amplificare și  $\tau = \frac{a_1}{a_0}$  - constanta de timp

Considerăm că la intrare aplicăm un semnal treaptă unitate:  $X(s) = \frac{1}{s}$ .

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(1 + \tau \cdot s)}, \quad \Rightarrow Y(s) = k \left( \frac{1}{s} - \frac{\tau}{1 + \tau \cdot s} \right) = k \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right), \text{ de unde aplicând}$$

$$\text{Laplace invers } L^{-1} \Rightarrow y(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$k = y_s$   
 $\tau$  - constanta de timp  
 $y_s$  - valoarea de regim staționar  
 $B_s$  - banda de stabilizare



Teoretic, valoarea de regim staționar se atinge după  $t = \infty$ . Practic, se consideră că regimul tranzitoriu devine neglijabil dacă ieșirea a intrat în banda de stabilizare și nu o mai părăsește.

**Indicatori:****1. Eroarea dinamică:**

$$\varepsilon_D(t) = y(t) - y_s, \quad \varepsilon_D(t) = -k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_D(t) = 0$$

- 2. Timpul de stabilizare  $t_s$**  - reprezintă acea valoare de timp pentru care eroarea dinamică devine inferioară benzii de stabilizare și nu o mai depășește.

$$|\varepsilon_D(t = t_s)| \leq B_s, \quad \forall t \geq t_s$$

La sistemele fizice realizabile (de exemplu traductoare)  $B_s$  se ia procentual din valoarea  $y_s$ .

De exemplu, considerînd  $B_s = (2...5)\% y_s = (0,02...0,05)y_s$

$$k e^{-\frac{t_s}{\tau}} \leq (0,02...0,05)k \quad \Rightarrow \quad -\frac{t_s}{\tau} \leq \ln(0,02...0,05)$$

$$\Rightarrow t_s \geq \tau \ln \frac{1}{0,02...0,05} \quad \Rightarrow \quad t_s \geq \tau \ln(20...50)$$

- 3. Constanta de timp  $\tau$**  - egală cu valoarea subtangentei considerate pentru  $t=0$

$$tg\alpha = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{k}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \left. \frac{k}{tg\alpha} \right|_{t=0}$$

- 4. Pulsația de bandă  $\omega_B$**  - acea valoare a pulsației pentru care amplitudinea scade în raport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  din cea corespunzătoare pulsației  $\omega = 0$ .

$$H(\omega_B) = \frac{H(0)}{\sqrt{2}} = 0,707 H(0) = 0,707 k$$

$$\frac{k}{\sqrt{1 + \omega_B^2 \tau^2}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \frac{1}{\tau}$$

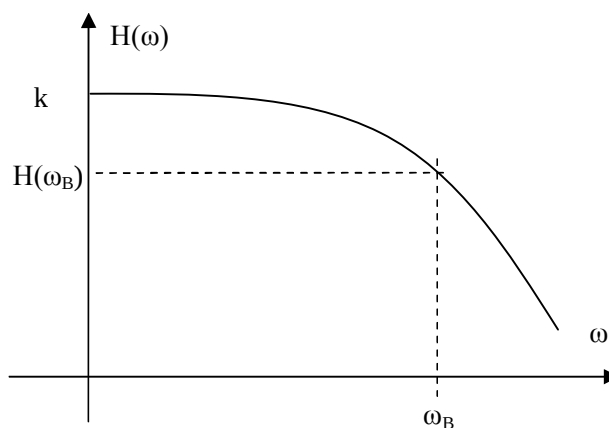
## 5. Caracteristicile de frecvență ale traductorului:

Din  $H(s) = \frac{k}{1 + \tau \cdot s}$  înlocuind variabila  $s$  cu  $s = j\omega$ , rezultă  $H(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega\tau}$

Se obține:

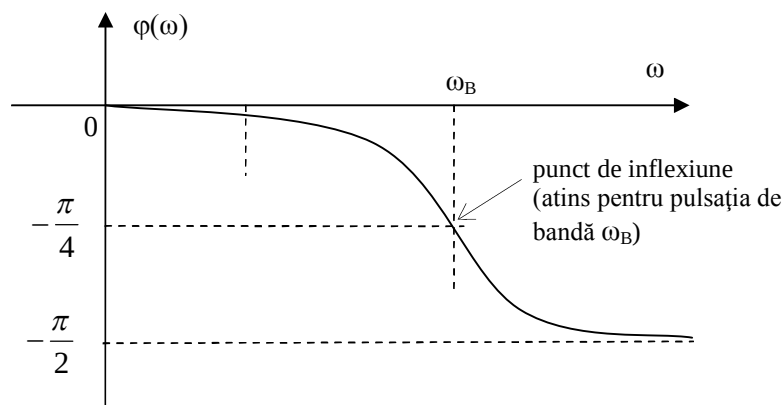
- caracteristica de amplitudine

$$H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$



- caracteristica de fază:

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\tau \cdot \omega)$$



Din caracteristica amplitudine-pulsăție se remarcă caracteristica de filtru trece-jos al unui traductor care are o componentă dinamică asimilabilă unui element de întârziere de ordinul 1. Rezultă că un traductor va lua în considerare semnalele de intrare de frecvențe joase caracteristice parametrilor de proces uzuali și va elimina perturbațiile care sunt, de regulă, de frecvențe înalte.

**Problemă:**

Se dau ecuațiile:

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$x(t) = 10\sigma(t)$$

$\sigma(t)$  - funcția treaptă unitate

Cerințe:

- 1) Să se determine funcția de transfer a sistemului caracterizat de ecuația diferențială de mai sus.
- 2) Să se determine mărimea  $y(t)$  de la ieșire în condițiile în care la intrare este semnalul  $x(t)=10\sigma(t)$ .
- 3) Să se determine caracteristica de amplitudine.
- 4) Să se determine caracteristica de fază.
- 5) Să se determine parametrii dinamici ai răspunsului:  
eroare dinamică, timp de stabilizare, constanta de timp, pulsația de bandă .